

2014年 東大理系数学 第4問

(1) $0 < q < 1$ のとき $0 < f(x) < 1$ を示す。

「 $0 < q < 1$ を満たす x について ...」といふ意味。
〔 $0 < q < 1$ を満たす x について ...〕と表現される
ことはない。

⇒ $0 < q < 1$ を満たす x の
最小値 > 0 かつ 最大値 < 1
となるより。

最大値・最小値問題は...

① グラフを描く。

- 一次関数 → 傾きと切片 など
- 二次関数 → 平方完成
- 三次以上 → 微分
- 三角・指數・対数 → 数Ⅱの教科書参照
- それらの融合 → 数Ⅱの微分

② 特殊な不等式

・相加相乗

・ヨー-シ-・シェワルの不等式

・実数条件 など

$$f(0) = -p + q + 1 = (1-p) + q > 0$$

$$f'(1) = -p + e^{-q} \quad \text{符号がわからず。}$$

・ $f'(1) > 0$ ただし $f'(x) > 0$ で $f(x)$ は単調増加

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	Min	Max

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 & f(1) &= 1-p < 1 \\ \min && \max & \\ \text{したがって: } 0 < f(x) < 1 & \text{が示せる。} \end{aligned}$$

・ $f'(1) < 0$ ただし $f'(x) = 0$ は $0 < x < 1$ で唯一の解

x	0	a	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	Max	$1-p$

$$\begin{aligned} \min && \text{不明} & \\ 0 < f(x) & \text{は示せず。} \end{aligned}$$

が「分子の2」
あるかね。

別方針

・特殊不等式も使えないよな感じ。

単純な不等式の計算で出来ないもつか...

(1) なし...

$$\begin{aligned} \text{下限 } f(x) &= (1-p)x + (1-q)(1-e^{-qx}) \\ &\stackrel{\text{正}}{=} \stackrel{\text{正}}{=} \stackrel{\text{正}}{=} \stackrel{\text{正}}{=} \\ \therefore f(x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 & \\ 1 > e^{-qx} & > e^{-q} \end{aligned}$$

$f(x)$ が大きく見積もる。

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-p)x + (1-q)(1-e^{-qx}) \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &< 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

大きく見積もります。

失敗

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-p)x + (1-q)(1-e^{-qx}) \\ &\downarrow \\ &< 1 \times q + (1-q) \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

成功

$$\therefore 0 < f(x) < 1$$

$$f(x) = (1-p)x + (1-q)(1-e^{-qx}) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-p + (-1(1-e^{-qx}) + (1-q) \cdot q e^{-qx}) \\ &= 1-p - 1 + e^{-qx} + (1-q)qe^{-qx} \\ &= -p + e^{-qx}(1+q(1-q)) \quad \text{↑ } f'(x) = 0 \text{ が} \\ &\quad \text{解はない。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -qe^{-qx}(1+q-qx) + e^{-qx}(-q) \\ &= -qe^{-qx}(2+q-qx) \\ &= qe^{-qx}(8x-8-2) \quad \text{↑ } f'(x) = 0 \text{ が} \\ &\quad x = 1 + \frac{2}{q} \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ の増減表は...

$$1 + \frac{2}{q} > 1 \quad \text{となる。}$$

増減表の外

x	0	1
$f''(x)$	--	
$f'(x)$	$f'(0)$	$f'(1)$

$f'(0)$ と $f'(1)$ の符号が分かりない